Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи по курсу

“Случайные процессы”

Студента 415 группы

Евстафьева А.И.

Преподаватель:

Круглов В.М.

Москва
2005г.

1 Задание

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — н.о.р.с.в распределенные равномерно на отрезке $[a,b]$, N — независимая с ними сл.в. распределенная по пуассоновскому закону с параметром λ. Доказать, что $x_t = \sum\limits_{i=1}^{N} I_t[x_i]$ — случайная величина, где I_t — индикатор отрезка $[a,t]$.

Доказательство:

Пусть все x_n и N распределены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Докажем, что $I_t[x_n]$ — случайная величина. Рассмотрим событие $A = \{\omega | I_t[x_n(\omega)] < x\}$. Очевидно что при $x \leq 0$, $A = \emptyset$, при $x > 1$, $A = \omega$, а при $x \in (0,1]$ событие A наступает только если $I_t[x_n] = 0$. Что в свою очередь происходит, если $x_n > t$. Таким образом $A = \{\omega | x_n(\omega) > t\} = x_n^{-1}((-\infty, t))$. Поскольку $(-\infty, t) \in \mathcal{B}$ и x_n сл.в., то $A = x_n^{-1}((-\infty, t)) \in \mathcal{F}$. Таким образом при любом x, $A = \{\omega | I_t[x_n(\omega)] < x\} \in \mathcal{F}$. Если теперь обозначим $\xi = I_t[x_n]$, то получим $\xi^{-1}((x, \infty)) \in \mathcal{F}$. Теперь на основании того, что $\xi^{-1}(A \cap B) = \xi^{-1}(A) \cap \xi^{-1}(B)$, $\xi^{-1}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(A_n)$, $\xi^{-1}(\overline{A}) = \overline{\xi^{-1}(A)}$ можно заключить, что $\forall A \in \mathcal{B}$, $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ (поскольку $\mathcal{B}$ порождается полуинтервалами). Значит $\xi = I_t[x_n]$ - случайная величина.

Докажем что сумма двух случайных величин — случайная величина. Итак, пусть ξ_1, ξ_2 — случайные величины, $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Рассмотрим множество $\{\omega | \eta(\omega) < x\}$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega | x_1(\omega) < r_i\} \cap \{\omega | x_2(\omega) < x - r_i\}$, где r_i — некоторая нумерация всех рациональных чисел. В силу того что x_1, x_2 — сл.в., то $\{\omega | x_1(\omega) < r_i\}$, $\{\omega | x_2(\omega) < x - r_i\} \in \mathcal{F}$. Значит пересечение этих множеств также принадлежит $\mathcal{F}$ и их бесконечное объединение тоже принадлежит $\mathcal{F}$ в силу того что $\mathcal{F}$ — σ-алгебра. Итак $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega | x_1(\omega) < r_i\} \cap \{\omega | x_2(\omega) < x - r_i\} \in \mathcal{F}$. Покажем что это множество совпадает с $\{\omega | \eta(\omega) < x\}$. Пусть $\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega | x_1(\omega) < r_i\} \cap \{\omega | x_2(\omega) < x - r_i\} \Rightarrow \exists j, x_1(\omega) < r_j$, $x_2(\omega) < x - r_j \Rightarrow \eta(\omega) = x_1(\omega) + x_2(\omega) < x$. В обратную сторону. Пусть $x_1(\omega) + x_2(\omega) < x \Rightarrow (x_1(\omega), x - x_2(\omega))$ — открытое множество. Значит $\exists r_j \in (x_1(\omega), x - x_2(\omega)) \Rightarrow x_1(\omega) < r_j$, $x_2(\omega) < x - r_j$ и ω

принадлежит первому множеству. Таким образом эти два множества совпадают и $\{\omega|\eta(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Получаем что $\eta^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$. Аналогично приведенным ранее рассуждениям получаем, что $\eta = \xi_1 + \xi_2$ сл.в..

Очевидным образом можно перенести утверждение на все конечные суммы случайных величин. Тогда $\eta_k = \sum\limits_{i=1}^{k} I_t[x_i]$ — случайная величина. Значит $x_t = \eta_N$. Рассмотрим множество $\{\omega|x_t(\omega) < x\} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{\omega|N(\omega) \in \{i\}\} \cap \{\omega|\eta_i(\omega) < x\}$. В силу того, что N и eta_i сл.в., то множества в объединении принадлежат $\mathcal{F}$, значит и все объединение принадлежит $\mathcal{F}$. Кроме того очевидно, что рассматриваемое множество совпадает с множеством $\{\omega|x_t(\omega) < x\}$. Получаем вновь, что $x_t^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{F}$, и аналогично доказанному ранее x_t — случайная величина. $\square$

2 Задание

Пусть x_t — пуассоновский процесс при $t \in (a, \infty)$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$. Найти совместную характеристическую функцию этого вектора $\mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} u_k}$.

Доказательство:

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} \left(\sum\limits_{r=k}^{n} u_r - \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} \sum\limits_{r=k}^{n} u_r - \sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{t_{k+1}} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r - \sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r =$ (подразумевается, что $\sum\limits_{r=n+1}^{n} u_r = 0$, кроме того по свойству пуассовновского процесса $x_{t_0} = x_a = 0$ п.н.) $= \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{t_{k+1}} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r - \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{t_k} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r (x_{t_{k+1}} - x_{t_k})$ п.н..

Значит $\mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k} u_k} = \mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r (x_{t_{k+1}} - x_{t_k})}$. Поскольку приращения пуассоновского процесса независимы, то получим

$\mathbb{E}e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} x_{t_k}u_k} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}e^{i\sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r(x_{t_{k+1}}-x_{t_k})}.$

По свойству пуассоновского процесса все приращенния распределены по пуассовноскому закону с параметром λ множеным на время приращения. Значит $\mathbb{E}e^{i\sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r(x_{t_{k+1}}-x_{t_k})} = e^{\lambda(t_{k+1}-t_k)\left(e^{i\sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r}-1\right)}$ $\square$

3 Задание

Процесс w_t — броуновское движение при $t \in [0, \infty)$. Доказать, что все три процесса броуновские:

а) $w'_t = \sqrt{c}w_{\frac{t}{c}}, c > 0$

б) $w''_t = w_{t+c} - w_c$

в) $w'''t = \begin{cases} 0 & , \ t = 0 \\ tw_{\frac{1}{t}} & , \ t > 0 \end{cases}$

Доказательство:

Докажем что $w_0 = 0$, п.н.. Итак, $w'_0 = \sqrt{c}w_0 = 0$ п.н., $w''_0 = w_c - w_c = 0$, $w'''_0 = 0$ по определению, значит свойство присутствует у всех процессов.

Докажем независимость приращений. Пусть $t_3 > t_2 > t_1$. Тогда $w'_{t_2} - w'_{t_1} = \sqrt{c}\left(w_{\frac{t_2}{c}} - w_{\frac{t_1}{c}}\right)$ — эти приращения независимы из броуновости w_t, для точек $\frac{t_1}{c}, \frac{t_2}{c}$. Также $w''_{t_2} - w''_{t_1} = w_{t_2+c} - w_{t_1+c}$ — независимы из-за независимости в исходном процессе для точек $t_1 + c, t_2 + c$. Так же $w'''_{t_2} - w'''_{t_1} = t_2 w_{\frac{1}{t_2}} - t_1 w_{\frac{1}{t_1}}$. Для доказательства этого утверждение в пункте в), построим совместную характеристическу функцию для $w'''_{t_3} - w'''_{t_2}$, $w'''_{t_2} - w'''_{t_1}$. Итак $\mathbb{E}\exp\left(i\left(\left(t_2 w_{\frac{1}{t_2}} - t_1 w_{\frac{1}{t_1}}\right)x + \left(t_3 w_{\frac{1}{t_3}} - t_2 w_{\frac{1}{t_2}}\right)y\right)\right) = \mathbb{E}\exp\left(i\left(-t_1 x\left(w_{\frac{1}{t_1}} - w_{\frac{1}{t_2}}\right) + (-t_1 x + t_2 x - t_2 y)\left(w_{\frac{1}{t_2}} - w_{\frac{1}{t_3}}\right) + (-t_1 x + t_2 x - t_2 y + t_3 y) w_{\frac{1}{t_3}}\right)\right) = \exp\left(\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)t_1^2 x^2/2\right)\exp\left(\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3}\right)\left((t_2 - t_1)x - t_2 y\right)^2/2\right)\exp\left(\frac{1}{t_3}((t_2 - t_1)x + (t_3 - t_2)y)^2/2\right) = \exp((t_2 - t_1)x^2/2)\exp((t_3 - t_2)y^2/2)$. Поскольку она распадается в произведение двух функций, то приращения независимы.

Докажем теперь что приращения распределены по нормальному закону с параметрами 0 и $t_2 - t_1$. Итак $w'_{t_2} - w'_{t_1} = \sqrt{c}\left(w_{\frac{t_2}{c}} - w_{\frac{t_1}{c}}\right)$, $\left(w_{\frac{t_2}{c}} - w_{\frac{t_1}{c}}\right) \sim N(0, \frac{t_2-t_1}{c}) \Rightarrow w'_{t_2} - w'_{t_1} = \sqrt{c}\left(w_{\frac{t_2}{c}} - w_{\frac{t_1}{c}}\right) \sim N(0, t_2 - t_1)$. Также $w''_{t_2} - w''_{t_1} = w_{t_2+c} - w''_{t_1+c} \sim N(0, t_2 - t_1)$. Для последнего случая имеем $w'''_{t_2} - w'''_{t_1} = t_2 w_{\frac{1}{t_2}} - t_1 w_{\frac{1}{t_1}} = t_1(w_{\frac{1}{t_2}} - w_{\frac{1}{t_1}}) + (t_2 - t_1) w_{\frac{1}{t_2}}$. Поскольку в исходном процессе приращения независимы, то $w_{\frac{1}{t_2}} - w_{\frac{1}{t_1}}$ и $w_{\frac{1}{t_2}}$ — независимы. Кроме того $w_{\frac{1}{t_1}} - w_{\frac{1}{t_2}} \sim N(0, \frac{t_1-t_2}{t_1 t_2}) \Rightarrow t_1\left(w_{\frac{1}{t_2}} - w_{\frac{1}{t_1}}\right) \sim N(0, \frac{t_1(t_2-t_1)}{t_2})$; $(t_2 - t_1) w_{\frac{1}{t_2}} \sim N(0, \frac{(t_2-t_1)^2}{t_2})$. В силу их независимости, их сумма будет иметь распределение $N(0, \frac{t_2^2+t_1^2-2t_1t_2+t_1t_2-t_1^2}{t_2}) = N(0, t_2 - t_1)$. Итак все приращения распределены по нормальному закону. $\square$

4 Задание

Задан пуассоновский процесс x_t при $t \in [0, \infty)$ с параметром λ. Пусть $\tau_0,\ \tau_0 + \tau_1,\ \tau_0 + \tau_1 + \tau_2,\ \ldots$ — моменты наступления первого, второго и т.д. события в процессе (приращения). Доказать что τ_i — н.о.р.с.в., $\sim Exp(\lambda)$.

Доказательство:

Пусть $\xi_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i$.

Постараемся для начала найти совместную плотность $p_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}$. Очевидно, что $p_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_0, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_0 \ldots \partial t_n} \mathbb{P}(\xi_0 \le t_0, \ldots, \xi_n \le t_n)$. Кроме того $\mathbb{P}(\xi_0 \le t_0, \ldots, \xi_n \le t_n) = \mathbb{P}(\xi_0 \le t_0, \ldots, \xi_{n-1} \le t_{n-1}) - \mathbb{P}(\xi_0 \le t_0, \ldots, \xi_{n-2} \le t_{n-2}, \xi_n > t_n) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(\xi_0 > t_0, \ldots, \xi_n > t_0)$. Очевидно, что при дифференцировании все слагаемые в которых содержаться не полностью все t_i удалятся и таким образом останется $p_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_1, \ldots, t_n) = (-1)^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial t_0 \ldots \partial t_n} \mathbb{P}(\xi_0 > t_0, \ldots, \xi_n > t_n)$. Теперь распишем $\mathbb{P}(\xi_0 > t_0, \ldots, \xi_n > t_n) = \mathbb{P}(x_{t_0} \le 0, x_{t_1} \le 1, \ldots, x_{t_n} \le n) = \mathbb{P}(x_{t_0} = 0, x_{t_1} = 0, \ldots, x_{t_n} = 0) + \ldots + \mathbb{P}(x_{t_0} = 0, x_{t_1} = 1, \ldots, x_{t_n} = n)$. Рассмотрим одну такую вероятность, итак $\mathbb{P}(x_{t_0} = k_0, x_{t_1} = k_1, \ldots, x_{t_n} = k_n) = \mathbb{P}(x_{t_0} = k_0, x_{t_1} - x_{t_0} = k_1 - k_0, \ldots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})$. Поскольку приращения независимы и распределены по пуассоновскому закону, то $\mathbb{P}(x_{t_0} = k_0, x_{t_1} - x_{t_0} = k_1 - k_0, \ldots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}) = \exp(-\lambda t_0)\frac{(t_0\lambda)^{k_0}}{k_0!}\exp(-\lambda(t_1 - t_0))\frac{((t_1-t_0)\lambda)^{k_1-k_0}}{(k_1-k_0)!}\ldots\exp(-\lambda(t_n - t_{n-1}))\frac{((t_n-t_{n-1})\lambda)^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!} = \exp(-\lambda t_n)\frac{(t_0\lambda)^{k_0}}{k_0!}\ldots\frac{((t_n-t_{n-1})\lambda)^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}$. Кроме того $k_0 = 0$, $k_n \leq n$. Заметим что данное произведение не вырождается при дифференцировании по всем переменным только в случае $k_i - k_{i-1} <> 0$, однако в таком случае получаем, что $k_i - k_{i-1} = 1$ для всех i. Таким образом $p_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_0, \ldots, t_n) = \begin{cases} \lambda^{n+1}\exp(-t_n\lambda) & , \ t_0 < t_1 < \ldots < t_n \\ 0 & , \ \text{иначе} \end{cases}$

Теперь $\mathbb{P}(\tau_0 \leq t_0, \ldots, \tau_n \leq t_n) = \mathbb{P}(\xi_0 \leq t_0, \ldots, \xi_n - \xi_{n-1} \leq t_n) = \int\limits_{(\xi_0 \leq t_0, \ldots, \xi_n - \xi_{n-1} \leq t_n)} \lambda^{n+1}\exp(-\xi_n\lambda)I(\xi_0 \leq \ldots \leq \xi_n)d\xi_0\ldots d\xi_n$. Сделаем замену переменных $\tau_0 = \xi_0$, $\tau_i = \xi_i - \xi_{i-1}$. Дискрименант замены равен 1. Получим $\int\limits_{(0 \leq \tau_i \leq t_i, \forall i)} \lambda^{n+1}\exp(-(\tau_0 + \ldots + \tau_n)\lambda)d\tau_0\ldots d\tau_n$. Этот интеграл распадается в произведение интегралов $\int\limits_{(0 \leq \tau_i \leq t_i)} \lambda\exp(\tau_i\lambda)d\tau_i = 1 - e^{-\lambda t_i}$. Получаем $\mathbb{P}(\tau_0 \leq t_0, \ldots, \tau_n \leq t_n) = (1 - e^{-\lambda t_0})\ldots(1 - e^{-\lambda t_n})$, а из этого следует что случайные величины τ_i независимы в совокупности и одинаково распределены по экспоненциальному закону с параметром λ.

□